الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى

الجامعة المفتوحة

تمــارين محلــولة فــي مــادة رياضيات مالية وعامة

إعداد/

د.عزيمة سلامة خاطر

أ.نصرالدين الكاتب

فهرس المحتويات

مقدمة

في إطار سعي الجامعة المفتوحة إلى تحسين نوعية التعليم بها، وترسيخاً لمفهوم التعلم الذاتي، تم تكليف بعض أعضاء هيئة التدريس بإعداد ملخصات للمواد التعليمية، وأسئلة وتمارين محلولة بهدف مساعدة الطالب على الدراسة الذاتية، والسير في المقرر الدراسي وفقاً لقدراته وظروفه وإمكانياته، وممارسة التقييم الذاتي لمستوى تحصيله العلمي وبصورة مستمرة.

لذا ننصح الدارس بقراءة موضوع أو أكثر من المقرر بفاعلية، ثم يبدأ في الإجابة عن الأسئلة أو التمارين ذات العلاقة بالموضوعات التي درسها ثم يقارن إجابته بالإجابة النموذجية، فإذا وجد إجابته صحيحة ينتقل لدراسة موضوع أو موضوعات أخرى وهكذا.

وعند الانتهاء من دراسة المقرر يبدأ في التدرب على الإجابة عن أسئلة امتحانات سابقة ويقارن إجابته بالإجابات والحلول لهذه الامتحانات، إلى جانب ذلك ينبغي على الدارس أن يستفيد في دراسة المقررات من الوسائط والأساليب والخدمات الأخرى التي توفرها الجامعة من ذلك: حضور اللقاءات العلمية المكثفة، الاستفسار من أساتذة المواد عن نقاط أو جوانب وجد فيها صعوبة.

والله الموفق

الجامعة المفتوحة

تمارين محلولة في مادة رياضيات مالية وعامة

المصفوفات

مفهوم المصفوفة:

يحتاج مجتمعنا إلى سجلات محفوظة يدون فيها تراثه ومنجزاته وخطط تنميته، وكلما كانت هذه السجلات مرتبة وسهلة الاستعمال كلما كانت أكثر مساهمة في تطوير المجتمع ودفع عجلة تقدمه إلى الأمام.

فإذا أعطينا المعلومات التالية عن ثلاث مدارس أ، ب، ج من حيث عدد صفوف كل واحدة منها وعدد معلميها: عدد صفوف المدرسة (أ) يساوي 22 صفًا، وعدد معلميها 20 معلماً، وعدد صفوف المدرسة (ب) يساوي 19 صفاً وعدد معلميها يساوي 16 معلماً، وعدد صفوف المدرسة (ج) يساوي 20 صفاً وعدد معلميها يساوي 17 معلماً.

فإنه يكون من الصعب أن نتذكر المعلومات المعطاة بهذا الشكل أو أن نقارن بينها، ويمكن الحصول على صورة أوضح لهذه المعلومات إذا وضعت على صورة جدول أو مستطيل منظم كما يلي:

	عدد الصفوف	عدد المعلمين
المدرسة أ	22	20
المدرسة ب	19	16
المدرسة ج	20	17

نستنتج أن: المصفوفة هي: ترتيب منظم من الأعداد مكون من صفوف وأعمدة.

فإذا كانت مصفوفة مكونة من (ل) صفاً، (م) عمودًا فنقول إِن المصفوفة من رتبة ل × م أو المصفوفة هي مصفوفة ل × م وإذا تساوى عدد الصفوف وعدد الأعمدة في مصفوفة (ما) فتسمى المصفوفة مصفوفة مربعة.

مثال:

إذا كانت أ= $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ، ب= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ ، ج= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 \\ -3 & 0 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

فإن (أ) هي مصفوفة من رتبة 2×2 وهي مصفوفة مربعة، (ب) هي مصفوفة من الرتبة 3 × 2، (ج) هي مصفوفة من الرتبة 2 × 4.

وإذا رمزنا لعنصر المصفوفة بالرمز (أ) فإن العنصر الذي موقعه في الصف الأول والعمود الأول يكتب أ$_{11}$ والعنصر الذي موقعه في الصف الأول والعمود الثاني يكتب أ$_{21}$، والعنصر الذي موقعه في الصف الأول والعمود الثالث يكتب أ$_{31}$، والعنصر الذي موقعه في الصف الثاني والعمود الأول يكتب أ$_{12}$ وهكذا....كما هو موضح في المصفوفة العامة التالية: نجد أن المصفوفة العامة هي من الرتبة م × ن فيكون عدد الصفوف فيها هو (م) وعدد الأعمدة (ن).

حيث أ$_{\text{م ن}}$ هو العنصر الذي يقع في الصف الذي رتبته م والعمود الذي رتبته ن.

أ$_{11}$	أ$_{21}$	أ$_{31}$	أ$_{41}$	....	أ$_{\text{ن}1}$
أ$_{12}$	أ$_{22}$	أ$_{32}$	أ$_{42}$	....	أ$_{\text{ن}2}$
أ$_{13}$	أ$_{23}$	أ$_{33}$	أ$_{43}$	....	أ$_{\text{ن}3}$
أ$_{14}$	أ$_{24}$	أ$_{34}$	أ$_{44}$	....	أ$_{\text{ن}4}$
⋮	⋮	⋮	⋮	....	⋮
أ$_{\text{م}1}$	أ$_{\text{م}2}$	أ$_{\text{م}3}$	أ$_{\text{م}4}$	....	أ$_{\text{م ن}}$

أنواع المصفوفات:

1- المصفوفة المربعة: إذا كان م = ن فإن عدد الصفوف = عدد الأعمدة تسمى في هذه الحالة مصفوفة مربعة مثل:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$ مصفوفة مربعة من الرتبة 2 × 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$ مصفوفة مربعة من الرتبة 3 × 3

وهكذا إلى أن تصل إلى مصفوفة مربعة من الرتبة ن × ن أو م × م

2- المصفوفات المتساوية: نقول إن المصفوفتين أ، ب متساويتان فيما إذا كانت فقط هاتان المصفوفتان من درجة (رتبة) واحد وكان كل عنصر من إحداهما مساوياً للعنصر المقابل له من الثانية.

مثل المصفوفة

$$\begin{pmatrix} ص & س \\ ل & ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

في هذه الحالة س = 1، ص = 2، ع = 5، ل = 6

3- المصفوفة الصفرية: هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار ويمكن تكوينها بأي نوع حسب وضعها مع مصفوفات أخرى وتكتب

$$صفر = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

هذا ويمكن أن تأخذ المصفوفة الصفرية أي شكل 2 × 2 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ، أو 3 × 2 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

أو 1 × 3 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ وهكذا.

4- المصفوفات المتماثلة: إذا كانت (أ) مصفوفة فإنها تكون متماثلة إذا كانت المصفوفة تساوي محورتها.

أي إذا كانت أ = $\bar{أ}$ مثل أ = $\begin{pmatrix} و & هـ & د \\ ص & ب & هـ \\ ع & ص & و \end{pmatrix}$ = $\bar{أ}$

حيث تكون عناصر المصفوفة متماثلة حول القطر الرئيسي لها

5- المصفوفة الملتوية التماثل: تكون المصفوفة ملتوية التماثل إذا كان:

$\bar{أ}$ = − أ مثل
$$\begin{pmatrix} ب & أ & 0 \\ ج & 0 & -أ \\ 0 & -ج & -ب \end{pmatrix}$$

ويكون قطر المصفوفة أصفارًا وتكون العناصر متماثلة حول القطر الرئيسي بإشارات مختلفة.

6- مصفوفة الوحدة: هي مصفوفة مربعة بحيث يكون كل عنصر على القطر الرئيسي يساوي 1 والعناصر الأخرى جميعها أصفار ويرمز لها بالرمز (و) مثل

و = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ من الرتبة 2 × 2

أو و = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ من الرتبة 3× 3

جمع المصفوفات:

أ- يجب عند جمع أو طرح مصفوفتين أن تكونا من نوع واحد وذلك؛ لأنه يتم جمع أو طرح العناصر المتناظرة في كلتيهما.

ب- وإذا كانت أ مصفوفة فإن –أ أو (−1) (أ) يُسمى المعكوس الجمعي للمصفوفة (أ) أي أن أ + (–أ) = صفر، وهذه المصفوفة المحايدة على عملية الجمع

ج- عملية جمع المصفوفات تبديلية وتنسيقية

مثال:

إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

فإن أ + ب = $\begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ (1-)+0 & 2+1 & 5+4 \end{pmatrix}$

أي أن أ + ب = $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 1- & 3 & 9 \end{pmatrix}$

، أ – ب = $\begin{pmatrix} 2-1 & 3-2 & 0-3 \\ (1-)-0 & 2-1 & 5-4 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1- & 1- & 3 \\ 1 & 1- & 1- \end{pmatrix}$

ضرب عدد قياسي في مصفوفة:

إذا كانت (أ) مصفوفة وكان (ك) عددًا قياسياً (أي عدد حقيقي) فيكون حاصل الضرب ك أ أو أ ك عبارة عن مصفوفة ناتجة من ضرب كل عنصر للمصفوفة (أ) في المقدار ك.

مثال1:

إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4- & 5 \end{pmatrix}$ فإن 2أ = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \\ 8- & 10 \end{pmatrix}$

وبنفس الطريقة يمكن أخذ عامل مشترك من بين عناصر المصفوفة كلها مثل:

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \\ 8- & 10 \end{pmatrix}$ = 2 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4- & 5 \end{pmatrix}$

مثال2:

حل المعادلة: 2س + 3 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

حيث س مصفوفة ذات ثلاثة صفوف وعمودين

الحـــــل:

2س = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

∴ 2س = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ ⇐ س = $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & -3 \end{pmatrix}$

ضرب المصفوفات:

يتم ضرب مصفوفتين إذا كان عدد الأعمدة في المصـــفوفة الأولـــى يســـاوي عـــدد الصفوف في المصفوفة الثانية، وبشكل خاص يكون حاصل ضرب أ × ب معرفاً إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة أ مساوياً لعدد الصفوف في المصفوفة ب، وتكون رتبة أ × ب هي عدد صفوف المصفوفة أ × عدد أعمدة المصفوفة ب.

مثال(1):

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 1- & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 6 & 1- & 0 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1- \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

فإن:

أ × ب = $\begin{pmatrix} 1- & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 6 & 1- & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1- \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

من الرتبة 3 × 3   من الرتبة 3 × 2

الناتج = $\begin{pmatrix} (3)(1-)+2\times3+0\times1 & 1\times(1-)+(1-)3+1\times1 \\ 3\times0+2\times0+0\times2 & 1\times(0)+(1-)\times0+1\times2 \\ (3\times6)+(2)(1-)+0\times0 & 1\times6+(1-)(1-)+1\times0 \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} 3-6+0 & 1-3-1 \\ 0+0+0 & 0-0+2 \\ 18+2-0 & 6+1+0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 3 & 3- \\ 0 & 2 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$ رتبتها 3 × 2

مثال(2):

أوجد حاصل ضرب المصفوفتين ك = $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، ع = $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

الحل:

$$ك.ع = \begin{pmatrix} 7\times3 + 8\times6 & 5\times3 + 6\times6 \\ 7\times7 + 8\times2 & 5\times7 + 6\times2 \\ 7\times3 + 8\times4 & 5\times3 + 6\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & 51 \\ 65 & 47 \\ 53 & 39 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة الأولى من الرتبة 3×2، المصفوفة الثانية من الرتبة 2×2، أي أن عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى = عدد الصفوف في المصفوفة الثانية والمصفوفة الناتجة من حاصل الضرب هي من الرتبة 3×2.

أي أن حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة م×ن في مصفوفة من الرتبة ن×هـ فإن الناتج يكون مصفوفة من الرتبة م×هـ.

> **ملاحظة:**
>
> **عملية ضرب المصفوفات ليست تبديلية.**
>
> **أي أنه إذا كان أ مصفوفة، ب مصفوفة فإن أ.ب ≠ ب.أ**

مثال 1:

إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

فأوجد كل من أ.ب، ب.أ ثم اكتب ملاحظاتك.

الحــــل:

أ.ب = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

، ب.أ = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وعليه نلاحظ أن أ.ب ≠ ب.أ

ملاحظة هامة:

حاصل ضرب مصفوفة الوحدة في أي مصفوفة هي عملية تبديلية.

مثال:

أوجد $\begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ج} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

، $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ج} \end{pmatrix}$

الحــــل:

أولاً: $\begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ج} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ}\times 0 + \text{ب}\times 1 & \text{أ}\times 1 + \text{ب}\times 0 \\ \text{ج}\times 0 + \text{د}\times 1 & \text{ج}\times 1 + \text{د}\times 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ج} \end{pmatrix} \longrightarrow (1)$

ثانياً:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ج} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times\text{ب} + 0\times\text{د} & 1\times\text{أ} + 0\times\text{ج} \\ 0\times\text{ب} + 1\times\text{د} & 0\times 0 + 1\times\text{ج} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ج} \end{pmatrix} \longrightarrow (2)$$

نلاحظ أن (1) = (2)

<u>* تمارين محلولة: أوجد عملية الضرب فيما يأتي كلما أمكن ذلك:</u>

1- $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2- \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1- \\ 2 \end{pmatrix}$

من الرتبة 1×4   من الرتبة 4×1

الحـــــل:

$\begin{bmatrix} 2\times3 + 1-\times0 + 1\times1 + 1\times2- \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 + 0 + 1 + 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$ مصفوفة من الرتبة 1×1

2- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1- \end{pmatrix}_{1\times3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1- & 3 \end{bmatrix}_{3\times1}$

الحـــــل:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1- \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1- & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times1 & 1-\times1 & 3\times1 \\ 2\times2 & 1-\times2 & 3\times2 \\ 2\times1- & 1-\times1- & 3\times1- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1- & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2- & 1 & 3- \end{pmatrix}$$

3- إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 0 & 2- & 2 & 1- \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ، ب= $\begin{pmatrix} 2- & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

الحـــــل:

لا يمكن إيجاد أ.ب؛ لأن عدد الأعمدة في أ = 4 أعمدة وعدد الصفوف في ب = صفين

∴ عدد الأعمدة في الأولى ≠ عدد الصفوف في الثانية فلا يمكن إجراء عملية الضرب فـــي هذه الحالة.

4- إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 2- & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 0 & 2- & 2 & 1- \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

فاثبت أن أ.ب ≠ ب.أ

الحـــــل:

أ = $\begin{pmatrix} 2- & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 0 & 2- & 2 & 1- \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

∴ أ.ب= $\begin{pmatrix} 2- & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 2- & 2 & 1- \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3\times(2-) + 0\times1 & 0\times(2-) + 2-\times1 & (1\times2-) + 2\times1 & 2\times(2-) + 1-\times1 \\ 3\times1 + 0\times1 & 0\times1 + 2-\times1 & 1\times1 + 2\times1 & 2\times1 + 1-\times1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6- & 0+2- & 2-2 & 4-1- \\ 3+0 & 0+2- & 1+2 & 2+1- \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6- & 2- & 0 & 5- \\ 3 & 2- & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ = أ.ب

$$\begin{pmatrix} 2- & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 2- & 2 & 1- \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ = ب×أ ،

لا يمكن إجراء عملية الضرب ب.أ؛ لأن عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى = 4 أعمدة بينما عدد الصفوف في المصفوفة الثانية = صفين.

أي أن عدد الأعمدة في الأولى ≠ عدد الصفوف في الثانية

5- إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 0 & 1- \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

فأوجد أ.ب ، ب.أ واكتب ملاحظاتك

الحـــــل:

$$\begin{pmatrix} 1\times1 + 0\times2 & 1\times1 + 1-\times2 \\ 1\times3 + 0\times1 & 1\times3 + 1-\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \text{أ.ب}$$

$$(1) \longleftarrow \begin{pmatrix} 1 & 1- \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2- \\ 3 & 3+1- \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\times0 + 1\times1- & 1\times0 + 2\times1- \\ 3\times1 + 1\times1 & 1\times1 + 2\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{ب.أ}$$

$$(2) \longleftarrow \begin{pmatrix} 1- & 2- \\ 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

من (1) ، (2) نلاحظ أن أ.ب ≠ ب.أ

المحددات

مفهوم المحددة: إن محددة مصفوفة ما هو عدد حقيقي يُحسب بطريقة خاصة، وتعرف المحددات للمصفوفات المربعة فقط.

إذا كانت (أ) مصفوفة مربعة من الرتبة ل × ل فإن محددة أ تكتب | أ | تسمى محددة من رتبة (ل).

* طريقة فك المحدد بطريقة المرافقات (المحددات):

المحددات من الرتبة الثانية:

إذا كانت | أ | = $\begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{vmatrix}$ فإن محددة أ = | أ | = $أ_1 ب_2 - أ_2 ب_1$

مثال:

إذا كان | أ | = $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ فإن قيمتها = $3 \times 7 - 5 \times 2 = 21 - 10 = 11$

، $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 4 \times -6 - (5) \times -3$

$= -24 - (-15)$

$= -24 + 15 = -9$

الصورة العامة للمحدد من الرتبة الثانية هي: $\begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \end{vmatrix}$

حيث $أ_{صع}$ تعني العنصر الموجود في الصف ص والعمود ع.

وللسهولة يمكن التعبير عن المحدد بالرمز Δ (دلتا)، بحيث Δ_1 تدل على محدد من الرتبة الأولى يحتوي على عمود واحد وصف واحد Δ_1 = | $أ_{11}$ |، Δ_2 تدل على محددين من الرتبة الثانية أي أن:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \end{vmatrix} = أ_{11} \times أ_{22} - أ_{12} \times أ_{21}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} \\ أ_{12} & أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{23} & أ_{33} \end{vmatrix} = أ_{11} \begin{vmatrix} أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{23} & أ_{33} \end{vmatrix} - أ_{12} \begin{vmatrix} أ_{21} & أ_{31} \\ أ_{23} & أ_{33} \end{vmatrix} + أ_{13} \begin{vmatrix} أ_{21} & أ_{31} \\ أ_{22} & أ_{32} \end{vmatrix}$$

أي أنه عند معرفة قيمة المحدد من الرتبة الثالثة نقوم بفك المحدد إلى محيددات مـــن الرتبـــة الثانية مع مراعاة الإشارة في المحدد من الرتبة الثالثة كما يلي:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

فتصبح قيمة المحدد من الرتبة الثالثة كما يلي:

$$\Delta_3 = \text{أ}_{11}(\text{أ}_{22}\,\text{أ}_{33} - \text{أ}_{32}\,\text{أ}_{23}) - \text{أ}_{21}(\text{أ}_{21}\,\text{أ}_{33} - \text{أ}_{31}\,\text{أ}_{23}) + \text{أ}_{31}(\text{أ}_{21}\,\text{أ}_{32} - \text{أ}_{31}\,\text{أ}_{22})$$

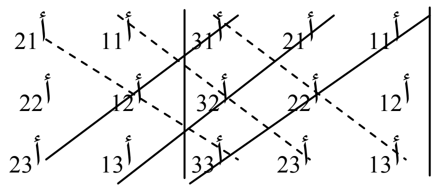
ملاحظة:

يسمى كل محيدد من المحيددات التي في محتوى Δ_3 السابقة بالمرافق حيث

مرافق أ_{11} هو المحيدد $\Delta_{11} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix}$ وهكذا ...... بقية المرافقات.

طريقة فك المحدد باستخدام الأقطار:

$\because\ \Delta_3 =$



$$\Delta_3 = [\text{أ}_{11}\times\text{أ}_{22}\times\text{أ}_{33} + \text{أ}_{21}\times\text{أ}_{32}\times\text{أ}_{13} + \text{أ}_{31}\times\text{أ}_{12}\times\text{أ}_{23}] - [\text{أ}_{13}\times\text{أ}_{22}\times\text{أ}_{31} + \text{أ}_{23}\times\text{أ}_{32}\times\text{أ}_{11} + \text{أ}_{33}\times\text{أ}_{12}\times\text{أ}_{21}]$$

الأقطار الرئيسية من اليمين   الأقطار الثانوية من اليسار

مثال 1:

أوجد قيمة المحدد $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ باستخدام الطريقتين السابقتين.

الحـــــل: الطريقة الأولى (طريقة المرافقات):

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1(5\times7-6\times-1)-4(2\times7-3\times-1)+2(2\times6-3\times5)$$

$$= (35+6) - 4(14+3) + 2(12-15)$$

$$= 41 - 68 - 6$$

$$= 41 - 74$$

$$= -33$$

الطريقة الثانية: (طريقة الأقطار)

$$\Delta_3 = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{array} =$$

$$= [1\times5\times7+4\times-1\times3+2\times2\times6] - [3\times5\times2+6\times-1\times1+7\times2\times4]$$

$$= (35-12+24) - (30-6+56)$$

$$= (59-12) - (86-6)$$

$$= 47 - 80$$

$$= -33$$

الحل بطريقة أخرى:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1(5\times7-(6\times-1))-2(4\times7-6\times2)+3[(4\times-1-5\times2)]$$

$$= (35+6) - 2(28-12) + 3(-4-10)$$

$$= 41-2(16)+3(-14)$$

$$= 41 - 32 - 42$$

$$= 41 - 74$$

$$= -33$$

ملاحظة:

كل طريقة من الطرائق السابقة تعطي نفس الناتج

مثال(2): أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية:

$$\begin{vmatrix} 1- & 0 & س \\ 4 & س & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 10$$ حيث س ∋ ح

الحـــــل: بفك المحدد باستخدام عناصر الصف الأول.

$$\therefore س \begin{vmatrix} 4 & س \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (1-) \begin{vmatrix} س & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

س (س−8) − صفر − 1 (6−2س) = 10

$س^2$ − 8س−6+2س= 10

$س^2$−6س−16 = 0

(س−8) (س+2) = 0

س = 8 أو س = −2

∴ مجموعة الحل هي {8، −2}

تمارين:

أوجد قيمة كل مما يأتي:

1− $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ ، $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1- \end{vmatrix}$

الحـــــلول:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right|$$

= [1×3×2+2×4×1+0×2×5] – [1×3×0+5×4×1+2×2×2]

= [6+8+0] – [0+20+8] = 14 – 28

= –14

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$ الفك بطريقة المحددات

= 1 (5×3–3×2) – 3 (7×3–3×1–) + 5 (7×2–5×1–)

= (15–6) – 3(21+3) + 5(14+5)

= 9 – 3(24+5(19))

= 9–72+95

= 104 – 72

= 32

2– أوجد قيمة المجهول في كل من المحددات الآتية:

$$أ = \begin{vmatrix} س & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ، \quad ب = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & س^2 \end{vmatrix} = 0$$

الحـــــل:

نستخدم فك المحدد كما يلي:

$$أ = \begin{vmatrix} س & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} س & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

= [س×1×1–+2×2–×0+3×4×1] – [0×1×3+1×2–×س+(1–)×4×2] = 0

Δ= [–س + صفر + 12] – [0–2س–8] = 0

= 12 – س + 2س + 8 = 0

0 = 20 + س ⇐ س = –20

$$\Delta= \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \text{س}^2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

الحــل:

$$\text{ب}= \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \text{س}^2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 0$$

$$0 = [-1\times1\times\text{س}^2+3\times1\times1+0\times0\times-2] - [1\times1\times0+(-2)\times1\times-1+\text{س}^2\times0\times3]$$

$$0 = [-\text{س}^2 + 3 + 0] - [0 + 2 + 0]$$

$$0 = -\text{س}^2 + 3 - 2 \Leftarrow$$

$$0 = -\text{س}^2 + 1 \Leftarrow \text{س}^2 = 1$$

$$\therefore \text{س} = \pm 1$$

3- من دون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} 15 & -2 & 3 \\ 20 & -1 & 4 \\ 55 & 6 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

* يأخذ 5 عامل مشترك من العمود الثالث

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & -2 & 3 \\ 20 & -1 & 4 \\ 55 & 6 & 11 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 11 & 6 & 11 \end{vmatrix}$$

نلاحظ أن العمود الأول = العمود الثالث

$\therefore \Delta =$ صفر

خواص المحددات:

خاصية (1): في أي محدد إذا بدلت الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها فإن قيمة المحدد لا تتغير ويسمى المحدد الناتج محورة المحدد الأصلي.

مثال:

أوجد قيمتي $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} \Leftarrow \Delta' = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

بفك المحددات Δ ، Δ' نجد أن:

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(8-3) = 3\times5 = 15 \longrightarrow (1)$$

$$\text{،}\ \Delta' = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 3\ (8-3) = 3\times5 = 15 \longrightarrow (2)$$

نلاحظ أن $\Delta = \Delta'$ أي أن قيمة المحدد تساوي قيمة محورته.

خاصية (2): تتغير إشارة المحدد إذا تبادل الوضع صفان أو إذا تبادل الوضع عمودان.

أي أن:

إذا كان $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & \text{ج} \\ \text{هـ} & \text{د} & \text{و} \\ \text{ص} & \text{س} & \text{ع} \end{vmatrix}$

مثال عددي: $\Delta = \left|\begin{array}{ccc} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{array}$

$= (16+9+20) - (-24-2+60)$

$= 45 - 34 = 11$

، $-\Delta' = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{array}$

$= (5\times3\times4 + 4\times(-2)\times3 + 1\times1\times(-2)) - (3\times3\times1 + (-2)(-2)(5) + 4\times1\times4)$

$= (60-24-2) - (9+20+16)$

$= 34-45 = -11$

أي أن إشارة Δ تغيرت عندما تغير فيها صفان في الوضع أو عمودان في الوضع.

خاصية (3): ينعدم المحدد إذا تساوى صفان أو عمودان.

أي أن $\Delta = \left|\begin{array}{ccc} \text{ج} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ج} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ع} & \text{هـ} & \text{د} \end{array}\right| = 0 = \left|\begin{array}{ccc} \text{د} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{هـ} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{و} & \text{ج} & \text{ج} \end{array}\right|$

فمثلاً:

، $-\Delta = \left|\begin{array}{ccc} -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{array}$

$= (10+12-18) - (-18+12+10)$

$= 4 - 4 =$ صفر

لأن عناصر العمود الأول = عناصر العمود الثاني

الخاصية (4): إذا ضُرِبَ المحدد في مقدار ثابت فإنه يضرب في عناصر أحد الصفوف أو أحد الأعمدة.

أي أن:

إذا كانت $\Delta = \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{د} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix}$

فإن ك Δ = ك $\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{د} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ك ج} & \text{ك ب} & \text{ك أ} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{د} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix}$

أو $= \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ك ب} & \text{أ} \\ \text{و} & \text{ك هـ} & \text{د} \\ \text{ع} & \text{ك ص} & \text{س} \end{vmatrix}$

مثال: اثبت أن

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

الحـــــل:

$$= 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\times4 & 2\times4 & 1\times4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

ملاحظة:

يمكن حل هذا المثال بأخذ العدد 4 عاملاً مشتركاً من عناصر الصف الأول

خاصية (5): تنعدم قيمة المحدد إذا كان يحتوي على صف عناصره أصفار أو يحتوي على عمود عناصره أصفار.

مثال:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \text{صفر} = \begin{vmatrix} \text{أ} & 0 & \text{س} \\ \text{ب} & 0 & \text{ص} \\ \text{ج} & 0 & \text{ع} \end{vmatrix}$$

ويمكن التأكد من ذلك بفك المحدد باستخدام عناصر الصف الثاني الذي يحتوي على أصفار أو باستخدام عناصر أي صف أو عمود آخر.

خاصية (6): إذا تكونت عناصر أي صف أو أي عمود من المجموع الجبري لحدود عددها (ن) فإن المحدد يساوي مجموع (ن) من المحددات التي تحتوي على عناصر ذلك الصف أو العمود في كل منها حد واحد فقط.

مثال ذلك:

$$\begin{vmatrix} \text{س}_1+\text{أ}-\text{ب} & \text{ص}_1+\text{هـ}-\text{د} & \text{ع}_1+\text{و}-\text{ي} \\ \text{س}_2 & \text{ص}_2 & \text{ع}_2 \\ \text{س}_3 & \text{ص}_3 & \text{ع}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{س}_1 & \text{ص}_1 & \text{ع}_1 \\ \text{س}_2 & \text{ص}_2 & \text{ع}_2 \\ \text{س}_3 & \text{ص}_3 & \text{ع}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س}_2 & \text{ص}_2 & \text{ع}_2 \\ \text{س}_3 & \text{ص}_3 & \text{ع}_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{د} & \text{ي} \\ \text{س}_2 & \text{ص}_2 & \text{ع}_2 \\ \text{س}_3 & \text{ص}_3 & \text{ع}_3 \end{vmatrix}$$

مثال ذلك:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+4 & 1+2 & 1+1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \text{صفر} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

لأن الصفين الأول والثاني متساويان

خاصية (7): لا تتغير قيمة المحدد إذا أضفنا إلى عناصر أي صف أو عمود مضاعفات العناصر المناظرة للصفوف أو الأعمدة.

أي أن:

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{د} \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ع+ ط و + ق ن} & \text{ص+ ط هـ + ق م} & \text{س+ ط د + ق ل} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{د} \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \end{vmatrix}$$

مثال عددي:

اثبت أن: $\begin{vmatrix} 151 & 101 \\ 75 & 50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 75 & 50 \end{vmatrix}$

الحـــــل:

$$\begin{vmatrix} 151 & 101 \\ 75 & 50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+75\times 2 & 1+50\times 2 \\ 75 & 50 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 75\times 2 & 50\times 2 \\ 75 & 50 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 75 & 50 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 75 & 50 \\ 75 & 50 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 75 & 50 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times \text{صفر} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 75 & 50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 75 & 50 \end{vmatrix} = 25$$

أمثلة محلولة على المحددات:

1- أوجد قيمة المحددات الآتية باستخدام الفك بالمحيددات:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \quad ، \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \quad ، \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

الحــــل:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\times 3 - 2\times(-1) = 12 + 2 = 14$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\times 5 - 2\times 10 = 15 - 20 = -5$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\,[(-1\times -2) - (-2\times -2)] + 3\,[(3\times -2) - (1\times -2)] + 1\,[(3\times -2) - (1\times -1)]$$

$$= 4\,[2-4] + 3\,[-6+2] + 1\,[-6+1]$$

$$= 4(-2) + 3(-4) + 1\times(-5)$$

$$= -8 - 12 - 5 = -25$$

2- أوجد قيمة المحدد Δ باستخدام طريقة الأقطار:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

الحـــــل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3- & 4 \\ 2- & 1- & 3 \\ 2- & 2- & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3- & 4 \\ 1- & 3 \\ 2- & 1 \end{matrix}$$

= [(3−×3×2−)+(4×2−×2−)+1×1−×1] − [2−×3×1 + (1×2−×3−) + 2−×1−×4]

= [18+16+1−] − [6−6+8]

= 8 − (33) = −25

3− حل المعادلات الآتية باستخدام طريقة المحددات كما في المثال الذي أمامك:

3س + ص = 3

س + 2ص = −4

الحــل:

إذا كان Δ هي محدد المعاملات، Δ_1 محدد معاملات س، Δ_2 محدد معاملات ص

فإن س= $\frac{\Delta_1}{\Delta}$، ص = $\frac{\Delta_2}{\Delta}$،

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$، $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4- & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10$

، $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4- \end{vmatrix} = -12 - 3 = -15$

⇦ س= $\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$، ص = $\frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-15}{5} = -3$

4- باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 82 & 83 & 84 \\ 85 & 86 & 87 \\ 88 & 89 & 90 \end{vmatrix}$$

الحـــــل:

$$\because \Delta = \begin{vmatrix} 82 & 83 & 84 \\ 85 & 86 & 87 \\ 88 & 89 & 90 \end{vmatrix}$$

∴ بطرح العمود الثالث من العمود الأول ينتج الآتي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 82 & 83 & 82-84 \\ 85 & 86 & 85-87 \\ 88 & 89 & 88-90 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 82 & 83 & 2 \\ 85 & 86 & 2 \\ 88 & 89 & 2 \end{vmatrix}$$

ثم بطرح العمود الثالث من العمود الثاني ينتج الآتي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 82 & 82-83 & 2 \\ 85 & 85-86 & 2 \\ 88 & 88-89 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 82 & 1 & 2 \\ 85 & 1 & 2 \\ 88 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 82 & 1 & 1 \\ 85 & 1 & 1 \\ 88 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 0 = \text{صفر}$$

5- باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة المحدد الآتي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

الحـــــل:

بطرح العمود الرابع من العمود الأول والعمود الثاني ومن العمود الثالث ينتج الآتي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$ ثم

بطرح العمود الثاني – 2 العمود الثالث

وطرح العمود الأول – 3 العمود الثالث ينتج الآتي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 9 - 10 = -1$$

6- احسب قيمة | أ | إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1- & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

الحـــــل:

$$| أ | = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1- & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

= 1 (−1×2−1×0) −2 (0×2−1×1) + 0 (0×0−1×1−)

= −2 + (−2×−1) + صفر = −2 + 2 = صفر

طريقة أخرى:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1- & 0 & 1 & 1- & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |\text{أ}|$$

$= (1\times-1\times2+0\times0\times0+2\times1\times1) - (1\times-1\times0+0\times1\times1+2\times0\times2)$

$= (-2+2+0) - (0+0+0)$

= −2 + 2 = صفر

7− إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ، ب= $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

فاثبت أن | أ | | ب | = |أ ب|

الحـــــل:

أ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ⇦ | أ | = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ = 4 − 3 = 1

ب = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ⇦ |ب| = $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ = 3 − 6 = −3

∴ | أ | |ب| = 1 × −3 = −3 ⟵ (1)

، ∵ أ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ، ب= $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ فإن

أ × ب = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times1+3\times2 & 2\times1+1\times2 \\ 3\times2+3\times3 & 2\times2+1\times3 \end{pmatrix}$

∴ أ × ب = $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}$ ⇦ | أب| = $\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 15 & 7 \end{vmatrix}$

$\therefore$ | أب | = $4\times15-7\times9$

= $60 - 63 = -3$ ⟵ (2)

نلاحظ من (1)، (2) أن:

| أ | | ب | = | أب | = -3

معكوس المصفوفة:

للحصول على معكوس للمصفوفة يجب أن:

1- تكون المصفوفة مربعة.

2- تكون المصفوفة غير شاذة أي يكون محدد المصفوفة مساوياً قيمة غير الصفر، أي أن محدد المصفوفة $\Delta \neq 0$.

ويكون معكوس المصفوفة أ هو $أ^{-1}$ بحيث أ × $أ^{-1}$ = I حيث I هو مصفوفة الوحدة التي قطرها الرئيسي يكون عناصر كل منها 1 وبقية عناصرها أصفار فإذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعتين بحيث أب = I فإن أ = $ب^{-1}$

وإذا كانت ج، أ مصفوفتين مربعتين بحيث أج = I فإن ج= $أ^{-1}$

* خطوات الحصول على معكوس المصفوفة:

1- حساب قيمة محدد المصفوفة بحيث نتأكد من أن قيمته $\neq 0$.

2- الحصول على مصفوفة المرافقات للمصفوفة الأصلية.

3- الحصول على المصفوفة المحورة لمصفوفة المرافقات.

4- تقسيم عناصر المصفوفة المحورة على قيمة المحدد الموجودة في 1.

مثال1:

أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} 3- & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

الحـــــل:

1- محدد المصفوفة $\begin{pmatrix} 3- & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 3- & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ = 13

أي أن محدد المصفوفة $\neq 0$

مرافق العنصر 2 هو 5، مرافق العنصر 3- هو 1-

مرافق العنصر 5 هو 2، مرافق العنصر 1 هو 3

2- ∴ مصفوفة المرافقات هي $\begin{pmatrix} 1- & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

3− محورة مصفوفة المرافقات هي $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1- \end{pmatrix}$

4− نقسم مصفوفة (المحورة) على قيمة محدد المصفوفة وهو 13

∴ الناتج معكوس المصفوفة $\begin{pmatrix} 3- & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ هو = $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1- \end{pmatrix}$

$$أ^{1-} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1-}{13} \end{pmatrix}$$ وهو معكوس المصفوفة المطلوب

ملاحظة:

للتحقق من أن $أ^{1-}$ × أ = I

أي أن حاصل ضرب معكوس المصفوفة × المصفوفة الأصلية = مصفوفة الوحدة

وذلك باتباع الآتي:

$$\begin{pmatrix} 5\times\frac{3}{13}+3-\times\frac{5}{13} & 1\times\frac{3}{13}+2\times\frac{5}{13} \\ 5\times\frac{2}{13}+3-\times\frac{1-}{13} & 1\times\frac{2}{13}+2\times\frac{1-}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3- & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1-}{13} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{15}{13}+\frac{15-}{13} & \frac{3}{13}+\frac{10}{13} \\ \frac{10}{13}+\frac{3}{13} & \frac{2}{13}+\frac{2-}{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{13}{13} \\ \frac{13}{13} & 0 \end{pmatrix} =$$

وهو المطلوب

مثال2:

أوجد معكوس المصفوفة ل = $\begin{pmatrix} 1- & 2- & 1 \\ 1 & 1 & 3- \\ 1- & 2 & 1- \end{pmatrix}$

ومن ثم أثبت أن $\left(\overset{1-}{ل}\right)^{/} = \left(\overset{/}{ل}\right)^{1-}$

الحـــــل:

1− محدد المصفوفة المعطاة هو Δ = $\begin{vmatrix} 1- & 2- & 1 \\ 1 & 1 & 3- \\ 1- & 2 & 1- \end{vmatrix}$

$$10 = 3 + 7 = (6-2+1) - (6+2+1-) =$$

أي أن محدد المصفوفة $\neq 0$

2− مصفوفة المرافقات =

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3- \\ 2 & 1- \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3- \\ 1- & 1- \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1- & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2- & 1 \\ 2 & 1- \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 1- & 1 \\ 1- & 1- \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1- & 2- \\ 1- & 2 \end{vmatrix} - \\ \begin{vmatrix} 2- & 1 \\ 1 & 3- \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1- & 1 \\ 1 & 3- \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 1- & 2- \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

أي أن مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ محورتها = $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

∴ معكوس المصفوفة ل = ل$^{-1}$ = $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ وهو المطلوب أولاً

∴ $\left(\text{ل}^{-1}\right)^{/}$ = $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ ⟵ (1)

، ل$^{/}$ = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ⇦ $\Delta^{/}$ = $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

مصفوفة المرافقات للمصفوفة ل$^{/}$ = $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

محورة لمصفوفة المرافقات = $(\text{ل}^{/})^{/}$ = $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

$$\therefore \quad \left(\text{ل}^{/}\right)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longleftarrow (2)$$

من (1)، (2) نجد أنهما متساويان

$$\therefore \quad \left(\text{ل}^{/}\right)^{-1} = \left(\text{ل}^{-1}\right)^{/}$$

أمثلة محلولة على معكوس المصفوفة وأمثلة تتضمن حل المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات.

1- أوجد $أ^{-1}$ إذا علم أن أ = $\begin{pmatrix} 1- & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7- & 6- & 0 \end{pmatrix}$

الحـــــل:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1- & 0 & 1 & 1- & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 7- & 6- & 0 & 0 & 6- \end{array}\right| \quad = |أ|$$

$$[0\times3\times(7-)+1\times5\times(6-)+1-\times4\times0] - [(6-\times3\times1-)+0\times5\times0+7-\times4\times1] = |أ|$$

$$(0+30-0) - (18+0+28-) \quad =$$

$$0 \neq 20 = 30 + 10- \quad =$$

مصفوفة المرافقات =

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6- & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7- & 0 \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7- & 6- \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6- & 0 \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 1- & 1 \\ 7- & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1- & 0 \\ 7- & 6- \end{vmatrix} - \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1- & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 1- & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (0-18-) & (0-21-)- & (30-)-28- \\ (0-6-\times1)- & (0\times1-)-7-\times1 & (6-\times1-)-7-\times0 \\ (0\times3-4\times1) & ((3\times1-)-5\times1)- & (4\times1-)-5\times0 \end{pmatrix} \quad =$$

$$= \begin{pmatrix} -18 & 21 & 2 \\ 6 & -7 & -6 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

المصفوفة المحورة لمصفوفة المرافقات هي $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -8 & -7 & 21 \\ 4 & 6 & -18 \end{pmatrix}$

$$أ^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -8 & -7 & 21 \\ 4 & 6 & -18 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -8 & -7 & 21 \\ 4 & 6 & -18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{20} & \frac{-6}{20} & \frac{2}{20} \\ \frac{-8}{20} & \frac{-7}{20} & \frac{21}{20} \\ \frac{4}{20} & \frac{6}{20} & \frac{-18}{20} \end{pmatrix}$$

ملاحظة: تحقق من أن $أ^{-1} \times أ = I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2- باستخدام المصفوفات حلّ المعدلات الآتية:

س+ص+ع= 9

2س+5ص+7ع=52

2س+ص−ع= 0

الحـــــل:

نضع المعادلات في صورة مصفوفات كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 52 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \\ 1- & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لإيجاد $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ نبحث عن قيمة معكوس المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \\ 1- & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$0 \neq 4- = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \\ 1- & 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

مصفوفة المرافقات

$$\begin{pmatrix} 2+10- & (14-2-)- & 7-5- \\ (2-1)- & 2-1- & (1\times1)-(1-\times1)1-\times1 \\ 2-5 & (2-7)- & 5-7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8- & 16 & 12- \\ 1 & 3- & 2- \\ 3 & 5- & 2 \end{pmatrix}$$

المصفوفة المحورة لمصفوفة المرافقات هي

$$\begin{pmatrix} 2 & 2- & 12- \\ 5- & 3- & 16 \\ 3 & 1 & 8- \end{pmatrix}$$

∴ معكوس المصفوفة = $\frac{1}{4-}$ $\begin{pmatrix} 2 & 2\ - & 12- \\ 5- & 3- & 16 \\ 3 & 1 & 8- \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{1-}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 12- \\ 5- & 3- & 16 \\ 3 & 1 & 8- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 52 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2-}{4} & \frac{2-}{4} & \frac{12}{4} \\ \frac{5-}{4-} & \frac{3-}{4-} & \frac{16-}{4} \\ \frac{3-}{4} & \frac{1-}{4} & \frac{8-}{4-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 52 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}- & \frac{1}{2}- & 3 \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & 4-- \\ \frac{3-}{4} & \frac{1}{4}- & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 52 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times\frac{1}{2}\text{-}52\times\frac{1}{2}\text{-}9\times3 \\ 0\times\frac{5}{4}+52\times\frac{3}{4}+9\times4\ - \\ 0\times\frac{3}{4}\text{-}52\times\frac{1}{4}\text{-}9\times2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 27-26 \\ -36+39 \\ 18-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3- حل المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات:

إذا كانت أ= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة ب التي تجعل أ.ب = I

حيث I هي مصفوفة الوحدة $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ومن ذلك أوجد فئة الحل لنظام المعادلات الآتية:

س + 2ص + 3ع = 2

س + 3ص + 5ع = 3

س + 5ص + 12ع = 8

الحـــــل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{matrix}$$

$$= (36 + 10 + 15) - (9 + 25 + 24)$$

$$= 61 - 58 = 3$$

ثم نحسب مصفوفة المرافقات كما يلي:

مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} 2 & 7- & 11 \\ 3- & 9 & 9- \\ 1 & 2- & 1 \end{pmatrix}$

محورة مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} 1 & 9- & 11 \\ 2- & 9 & 7- \\ 1 & 3- & 2 \end{pmatrix}$

∴ معكوس المصفوفة أ = $أ^{1-}$ = $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 9- & 11 \\ 2- & 9 & 7- \\ 1 & 3- & 2 \end{pmatrix}$ = ب

المعادلات هي تكون مصفوفات كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 12 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

بضرب طرفي المعادلة في $أ^{1-}$ يكون

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9- & 11 \\ 2- & 9 & 7- \\ 1 & 3- & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1- \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1- \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3- \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} \therefore$$

أي أن س = 1، ص = −1 ، ع = 1 وهي فئة الحل المطلوبة

4− إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & \text{ك} & 7 \\ -4 & 9 & 14 \end{pmatrix}$ ، $أ^{-1}$ = $\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & \text{هـ} \end{pmatrix}$

فما قيمة كل من ك، هــ؟

الحــــــل:

أ × $أ^{-1}$ = I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & \text{ك} & 7 \\ -4 & 9 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & \text{هـ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

بالضرب ينتج أن:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\,\text{هـ} \\ 0 & 9-2\text{ك} & -4+\text{ك}+7\text{هـ} \\ 0 & 0 & 1+14\,\text{هـ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

∴ 3هــ = 0 ⇦ هــ = 0

، 9−2ك = 1 ⇦ 8 = 2ك ⇦ ك = 4

5- باستخدام خواص المحددات اثبت أن المحدد $\Delta = 0$ حيث:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب+ج} \\ 1 & \text{ب} & \text{ج+أ} \\ 1 & \text{ج} & \text{أ+ب} \end{vmatrix}$$

الحـــــل:

بجمع العمود الثالث مع العمود الثاني

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب+ج} \\ 1 & \text{ب} & \text{ج+أ} \\ 1 & \text{ج} & \text{أ+ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{أ+ب +ج} & \text{ب+ج} \\ 1 & \text{ب+ج+أ} & \text{ج+أ} \\ 1 & \text{ج+أ+ب} & \text{أ+ب} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta = \text{أ+ب+ج} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \text{ب+ج} \\ 1 & 1 & \text{ج+أ} \\ 1 & 1 & \text{أ+ب} \end{vmatrix}$$

نلاحظ أن العمود الأول = العمود الثاني

$\therefore \Delta =$ صفر

أمثلة تطبيقية على المصفوفات:

1- شركة لصناعة السيارات تنتج سيارات كبيرة وسيارات صغيرة ولديها ثلاثة مصانع حيث يقوم المصنع الأول بتجهيز الأجزاء الرئيسية والمصنع الثاني بالتجميع، بينما المصنع الثالث يقوم بأعمال التشطيب، فإذا كانت السيارة الكبيرة الواحدة تحتاج إلى 5 ساعات لتجهيز أجزائها، 8 ساعات للتجميع، 6 ساعات للتشطيب، بينما تحتاج السيارة الصغيرة إلى 3 ساعات للتجهيز، 5 ساعات للتجميع، 4 ساعات للتشطيب، وأتيح للمصنع الأول 38 ساعة عمل وللمصنع الثاني 62 ساعة عمل وللمصنع الثالث 38 ساعة عمل أسبوعياً.
فكم سيارة من كلا النوعين يمكن للشركة إنتاجها أسبوعياً.

الحـــــل:
نرمز للسيارة الكبيرة بالرمز (أ) وللسيارة الصغيرة بالرمز ب. وللمصنع الأول بـــالرمز (ك) والمصنع الثاني بالرمز (ل) والمصنع الثالث بالرمز (م).
وبالتالي فإن المعلومات الموجودة في هذه المسألة يمكن كتابتها على الشكل التالي:

	عدد الساعات اللازمة للسيارة الكبيرة	عدد الساعات اللازمة للسيارة الصغيرة	ساعات العمل
المصنع الأول ك	5	3	38
المصنع الثاني ل	8	5	62
المصنع الثالث م	6	4	48
عدد السيارات	$س_1$	$س_2$	

ويمكن كتابة الجدول في صورة معادلات خطية كما يلي:

$$5س_1 + 3س_2 = 38$$
$$8س_1 + 5س_2 = 62$$
$$6س_1 + 4س_2 = 48$$

ولتبسيط حل هذه المعادلات نضعها في صورة مصفوفات كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س_1 \\ س_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 62 \\ 48 \end{pmatrix}$$

ولإيجاد قيمتي $س_1$، $س_2$ نستخدم معكوس المصفوفة لكن المصفوفة التي لدينا ليست مربعة وعليه يجب أن نختار جزءًا من المصفوفة بحيث تكون مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2 للحصول على معكوس المصفوفة والذي يساعدنا في الحصول على قيمتي $س_1$، $س_2$ وذلك كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س_1 \\ س_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 62 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: نكتفي باستخدام مصفوفة من صفين وعمودين؛ لأنه لدينا مجهولان **(فقط)** هما $س_1$، $س_2$ وللحصول على قيمتها نتبع الآتي:

معكوس المصفوفة $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ **هي** $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} س_1 \\ س_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 38 \\ 62 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5\times 38 + (-3)\times 62 \\ -8\times 38 + 5\times 62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 - 186 \\ -304 + 310 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س}_1 \\ \text{س}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftarrow \text{س}_1 = 4 ،\ \text{س}_2 = 6$$

ومعنى ذلك أن عدد السيارات التي يمكن للمصنع الأول والمصنع الثاني تجهيزها وتركيبها 4 من الكبيرة، 6 من الصغيرة؛ ولذلك يحتاج المصنع الثالث إلى 4 × 6 + 6 × 4 وذلك بالتعويض في المعادلة الثالثة للحصول على احتياج المصنع الثالث للتصنيع والذي عدد ساعات العمل فيه 48 ساعة؛ لأن 4 × 6 + 6 × 4 = 48 ساعة عمل لتشطيبها.

2- تكوين جدول مصفوفة المعاملات الفنية (التكنولوجية). "التقنية"

يرمز عادة إلى العامل الفني بحرف أ مع ذكر مؤشرين يمثلان رقم القطاع المنتج للسلعة الوسيطية ورقم القطاع المستخدم لها.

فمثلاً أ_{52} يعطي المقدار المستخدم من القطاع رقم 2 لإنتاج وحدة واحدة من منتجات القطاع رقم 5 وهكذا.

أي أن

$$\text{أ}_{52} = \frac{\text{س}_{52}}{\text{ص}_5}$$

← مقدار ما استخدم من القطاع رقم 2 للإنتاج في القطاع رقم 5
← عدد الوحدات المنتجة في القطاع رقم 5

وبصفة عامة فإن

$$\text{أ}_{\text{م ق}} = \frac{\text{س}_{\text{م ق}}}{\text{ص}_{\text{ق}}} \Leftarrow \text{س}_{\text{م ق}} = \text{أ}_{\text{م ق}}\ \text{ص}_{\text{ق}}$$

مثـــــال:

يبين الجدول التالي المعادلات بين عدة صناعات وذلك بملايين الدينارات. كون من الجدول مصفوفة المعاملات الفنية.

من صناعة إلى	توزيع إنتاج الصناعات					
	الصلب	الفحم	الحديد	السيارات	الطلب النهائي	الطلب الكلي
الصلب 1	80	20	110	230	160	600
الفحم 2	200	50	90	120	140	600
الحديد 3	220	110	30	40	صفر	400
السيارات 4	60	140	160	240	400	1000
القيمة المضافة	40	280	10	370	صفر	صفر
الناتج الكلي	600	600	400	1000	صفر	صفر

مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج هي:

$$\begin{pmatrix} \frac{230}{1000} & \frac{110}{400} & \frac{20}{600} & \frac{80}{600} \\ \frac{120}{1000} & \frac{90}{400} & \frac{50}{600} & \frac{200}{600} \\ \frac{40}{1000} & \frac{30}{400} & \frac{110}{600} & \frac{220}{600} \\ \frac{240}{1000} & \frac{160}{400} & \frac{140}{600} & \frac{60}{600} \end{pmatrix}$$

4 3 2 1

$$\begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 400 \\ 1000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.23 & 0.275 & 0.033 & 0.133 \\ 0.12 & 0.220 & 0.083 & 0.333 \\ 0.40 & 0.075 & 0.183 & 0.367 \\ 0.24 & 0.400 & 0.233 & 0.100 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 440 \\ 460 \\ 400 \\ 600 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 439.6 \\ 459.6 \\ 400 \\ 599.8 \end{pmatrix} =$$

حيث يكون الفرق بين الطلب الكلي والطلب النهائي هو:

$$\begin{pmatrix} 440 \\ 460 \\ 400 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 140 \\ 0 \\ 400 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 400 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

نمــاذج من أسئلـــــة مـــــادة

رياضيات مالية وعامة وحلولها

إعداد/أ.نصرالدين الكاتب

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى

الجامعـــة المفتـــوحة

أسئلة في مـادة رياضيات مالية وعامة

on here.

<u>أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يأتي:</u>

س1: أ- أوجد مقدار دين قيمته الحالية التجارية 190 دينارًا إذا كانت الحطيطة الخارجية عشرة دنانير.

ب- اذكر شروط وجود معكوس ضربي للمصفوفة ثم أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة.

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ +6 & +2 \end{pmatrix}$$

س2: أ- اقترض أحد الأشخاص مبلغ 1000 دينار بسعر خصم 10% وتسلم مبلغ 820 دينارًا. أوجد مدة الخصم.

ب- أوجد $\int_1^3$ (6 س^2 −8 س+5) دس

س3:أ- إذا كانت العلاوة السنوية لمرتب أحد المنتجين في مصنع هي 600 دينار وكان مرتبه في آخر سنة عمل بها في المصنع قد بلغ 3300 دينار وإجمالي دخله طوال فترة عمله في هذه الوظيفة هو 10500 دينار. المطلوب قيمة المرتب عند بداية التعيين وعدد سنوات الخدمة.

ب- أوجد نهـــــــا$_{س \leftarrow 1}$ $\frac{س^2 - 1}{س - 1}$

س4:أ- في أحد المجتمعات في فترة معينة كانت دالة الاستهلاك هي ص = 80 + (0.25) س. احسب الحد الأدنى للاستهلاك وأوجد ما هو الدخل الذي عنده يتساوى الاستهلاك معه.

ب- إذا كان 10ص-50س-103=0 أوجد قيمة ص عند س=1 ثم أوجد ميل المستقيم الذي يمثل هذه الدالة.

س5:أ- اقترض شخص من مصرف عقاري مبلغ 10.000 دينار لمدة 20 عاماً وذلك بفائدة سنوية ثابتة 14% على أن يدفع الفوائد الدورية على شكل أقساط شهرية وفي حالة انتظامه في الدفع لنهاية المدة فإنه يعفى عن دفع الدين الأصلي.

احسب قيمة الفائدة الدورية وجملة ما يدفعه خلال السنوات العشرين.

ب- احسب $\frac{دص}{دس}$ إذا كان ص = (س^3 + 2) (س^2 + 9)

الأسئلة انتهت

إجابة السؤال الأول:

أ)

القيمة الاسمية = القيمة الحالية التجارية + الحطيطة الخارجية

(مقدار الدين) = 190 + 10 = 200 ديناراً

(أي أن الفائدة حسبت على أساس 200 ديناراً ثم خصمت من هذا المبلغ ، واستلم الباقي المفترض وهو 190 ديناراً).

ب)

الشروط لوجود المعكوس الضربي للمصفوفة هي :

1- أن تكون مربعة .
2- محددها لا يساوي صفراً .

المعكوس الضربي للمصفوفة

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6+ & 2+ \end{pmatrix}$$

لإيجاد المعكوس باستخدام المحددات :

1- توجد قيمة المحدد للمصفوفة.
2- توجد مرافقات جميع عناصر المصفوفة وتضع المرافق مكان العنصر.
3- توجد المصفوفة المدورة لمصفوفة المرافقات.
4- تقسم المصفوفة الناتجة في (3) على قيمة المحدد الناتج من (1) فنحصل على معكوس المصفوفة .

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

مرافق 3 = 6 ومرافق 7 = −2 ومرافق 2 = −7 ومرافق 6 = 3

مرافقات المصفوفة

$$\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 3 & 2- \end{pmatrix}$$

∴ محدد المصفوفة = 3 × 6 – 7 × 2 = 18 – 14 = 4

∴ مدور مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} 7- & 6 \\ 3 & 2- \end{pmatrix}$

أي أن معكوس المصفوفة = $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7- & 6 \\ 3 & 2- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7-}{4} & \frac{6}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{2-}{4} \end{pmatrix}$

للتأكد من الناتج نحسب :-

أ × أ$^{-1}$ = $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{7-}{4} & \frac{6}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{2-}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{4}+\frac{21-}{4} & \frac{14}{4}-\frac{18}{4} \\ \frac{18}{4}+\frac{14-}{4} & \frac{12}{4}-\frac{12}{4} \end{pmatrix}$

المصفوفة A × معكوس المصفوفة (A^{-1}) = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

إجابة السؤال الثاني :

أ)

الحطيطة الخارجية = القيمة الاسمية – القيمة الحالية

= 1000 – 820 = 180 دينارًا

الحطيطة الخارجية = القيمة الاسمية × المدة × السعر

ف = أ × ع × ن

$$180 = 1000 \times \frac{10}{100} \times \frac{ن}{360}$$

∴ ن $_{\text{مدة الخصم}}$ = $\frac{360\times100\times180}{10\times1000}$ = 648 يوماً = 1.8 سنة

ب)

أوجد $\int_1^3$ (6 $س^2$ −8 س+5) د س

= $\left[\frac{6س^3}{3} - \frac{8س^2}{2} + 5س\right]_1^3$ = $\left[2س^3 - 4س^2 + 5س\right]_1^3$

= [(5+(4−2) −(3×5+9× 4 −27×2)]

= 33 – 3 = 30

إجابة السؤال الثالث :

أ- قيمة المرتب السنوي عند بداية التعيين أ والزيادة السنوية هي 600

والمرتب الأخير 3300 = الحد الأخير

∴ متوالية عددية

ح ن = أ + (ن −1) د

3300 = أ + (ن − 1) 600 ———— (1)

مجموع ما تقاضاه يمثل مجموع حدود

جـ = $\frac{ن}{2}$ [2أ + (ن−1) د]   المتوالية العددية

10500 = $\frac{ن}{2}$ [2أ + (ن−1) 600] = مجموع الزيادات ———— (2)

من المعادلة (1)

∴ 3300 = أ + 600 ن − 600

3900 = أ + 600 ن

∴ **أ = 3900 − 600 ن** ———— (3)

بالتعويض في المعادلة رقم (2) نحصل على :

$$10500 = \frac{ن}{2}\,[\,2أ + (ن-1)\,600\,] = \frac{ن}{2}\,[\,2(3900-600ن) + (ن-1)\,600\,]$$

$$10500 = \frac{ن}{2}\,[7800 - 1200ن + 600ن - 600] = \frac{ن}{2}\,(7200 - 600ن)$$

$$10500 = \frac{600ن}{2}\,(12-ن) = 300ن\,(12-ن)$$

بالقسمة على 300

$$35 = ن\,(12-ن)$$

أي أن

$$35 = 12ن - ن^2$$

ومنها $ن^2 - 12ن + 35 = 0$

وباستخدام القانون $ن = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2}$

وحيث أن أ= 1 ، ب= -12 ، جـ= 35

$$\therefore ن = \frac{12 \pm \sqrt{144-4\times1\times35}}{2} = \frac{12\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{12\pm2}{2}$$

أي أن ن = 7 أو ن = 5

من المعادلة رقم (3)

عندما ن = 7 $\therefore$ أ= 3900 – 600 ×7= 3900- 4200

= - 300 أي أن الإجابة مرفوضة

وعندما ن = 5 $\therefore$ أ= 3900 – 600 × 5 = 3900- 3000

= 900

ومعنى ذلك أن مدة الخدمة هي 5 سنوات وقيمة المرتب عند بداية التعيين هو 900 دينار .

إجابة السؤال الثالث

ب)

أوجد نهـــا $_{س \leftarrow 1}$ $\frac{س^2 - 1}{س - 1}$ = نهـــا $_{س \leftarrow 1}$ $\frac{(س-1)(س+1)}{(س-1)}$

= نهـــا $_{س \leftarrow 1}$ (س +1) = 2

حل آخر للسؤال الثالث :

الفقرة ب -

بفرض أن س = 1+ هـ

نهـــا $_{س \leftarrow 1}$ $\frac{س^2 - 1}{س - 1}$ بالتعويض عن س = 1 تكون النتيجة $\frac{0}{0}$ غير معرفة

$$\therefore \lim_{س \to 1} \frac{[(1+هـ)^2 - 1]}{(1+هـ)-1} = \lim_{س \to 1} \frac{(1+2هـ+هـ^2-1)}{1+هـ-1}$$

$$\lim_{س \to 1} \frac{2هـ+هـ^2}{هـ} = \lim_{س \to 1} 2+هـ$$

وعندما هـ = 0

$$\therefore \lim_{س \to 1} \frac{س^2-1}{س-1} = 2$$

إجابة السؤال الرابع

أ) حيث إنّ ص = 80 + 0.25 س (دالة الاستهلاك)

الحد الأدنى للاستهلاك يكون عندما س = 0 أي أن أصل ص = 0

عندما يتساوى الاستهلاك مع الدخل أي أن ص = س

وحيث أن ص = 80 + 0.25 س

فإن ص = 80 + 0.25 ص

0.75 ص = 80

∴ س = ص = 106.67

إجابة السؤال الرابع :

ب) 10 ص – 50 س – 103 = 0 أوجد قيمة ص عندما س = 1

∴ 10 ص = 50 س + 103

∴ ص = 5 س + 10.3

عندما س = 1 فإن ص = 5 × 1 + 10.3 = 15.3

معادلة المستقيم ص = 5 س + 10.3

∴ ميل المستقيم = 5

إجابة السؤال الخامس :

ب) إذا كانت ص = (س^3 + 2) (س^2 + 9)

فإن $\frac{د ص}{د س}$ = (س^3 + 2) (2 س) + (س^2 + 9) (3 س^2)

= 2 س^4 + 4 س +3 س^4 + 27 س^2

= 5 س^4 + 27 س^2 + 4 س

إجابة السؤال الخامس :

أ) الفائدة لمدة عام = 10.000 × $\frac{14}{100}$= 1400 ديناراً

الفائدة الدورية (كل شهر) = $\frac{1}{12}$ × 1400 = 116.667 ديناراً

جملة ما يدفعه خلال 20 عاماً = 20 × 1400 = 28000 دينارٍ

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى

الجامعـــة المفتـــوحة

أسئلة في مـادة رياضيات مالية وعامة

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يأتي:

س1:أ- أوجد الفائدة التجارية إذا كانت الفائدة الصحيحة تساوي 1.849 دينار.

ب- أوجد د(س) حيث س عنصر في س أي س ∋ س

إذا كان س = { -1، 0، 1، 2}

د:س ←ص، حيث د(س) = س^2 + 1، أوجد المجموعة ص.

س2:أ- احسب جملة مبلغ 3000 ديناراً لمدة سبع سنوات بسعر فائدة مركبة 11.25%.

ب- أوجد معدل تغير الدالة ص = س^2، من س = 1 إلى س = 4

س3:أ- احسب القيمة الحالية لاستثمار عائده السنوي 3000 دينار وسعر الفائدة السائدة هي 12%.

ب- احسب $\int_1^3$ (س^2 - 2س+3) دس

س4:أ- إذا كان

$$\begin{pmatrix} 3 & \text{2س + ص} & \text{س} \\ 6 & \text{ع} & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

أوجد قيمة كل من س، ص، ع

ب- أوجد الفائدة البسيطة لمبلغ 100 ديناراً محسوبة لمدة 5 سنوات ثم محسوبة لمدة 6 شهور إذا كان سعر الفائدة 3%.

س5:أ- اتفق شخص مع مصرف على أن يقترض مبلغ 2000 دينار مع دفع أصل الدين في نهاية السنة وتقسيط الفوائد على 6 دفعات بمعدل دفعة كل شهرين من بداية المدة فإذا كان سعر الفائدة 6% أوجد مقدار الدفعة الدورية.

ب- أوجد $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^3 - 8}{\text{س} - 2}$

مع تمنياتي بالتوفيق

إجابة السؤال الأول :

أ) أوجد الفائدة التجارية إذا كانت الفائدة الصحيحة تساوي 1.849 دينار .

$$\frac{\text{الفائدة الصحيحة}}{\text{الفائدة التجارية}} = \frac{360}{365} = \frac{72}{73}$$

$$\therefore \frac{1.849}{\text{الفائدة التجارية}} = \frac{72}{73}$$

$$\therefore \text{الفائدة التجارية} = 1.849 \times \frac{73}{72}$$

= 1.875 ديناراً

ب- أوجد د(س) حيث س عنصر في س أي س ∋ س

إذا كان س = { -1، 0، 1، 2}

د: س ← ص، حيث د(س) = س^2 + 1، أوجد المجموعة ص.

ص = س^2 + 1

∴ د (س) = س^2+1

د: س ← ص بحيث د(س) = س^2+1

المجموعة ص
د(-1) = (-1 × -1) +1 =2
د(0) = 0 + 1 = 1
د(1) = (1 × 1) +1 = 2

حيث س^2 = س× س

د(2) = (2× 2) +1 = 5

∴ ص = { 1، 2 ، 5 }

إجابة السؤال الثاني

أ– احسب جملة مبلغ 3000 ديناراً لمدة سبع سنوات بسعر فائدة مركبة 11.25%.

جملة الدينار = $(1+ \frac{11}{100})^7$ = 2.07916 بفائدة 11 %

جملة الدينار = $(1+ \frac{12}{100})^7$ = 2.21068 بفائدة 12 %

الفرق في الجملة نتيجة الفرق 1 % = 2.21068 – 2.07916 = 0.134521

الفرق في الجملة نتيجة الفرق $\frac{1}{4}$ % = $\frac{1}{4}$ (0.134521) = 0.033630

جملة الدينار بسعر 11.25 % لمدة سبع سنوات = 2.07916 + 0.033630

= 2.10979

جملة مبلغ 3000 دينار = دينار بسعر $11\frac{1}{4}$ % لمدة سبع سنوات

= 3000 × 2.10979 = 6329.37 ديناراً

ب– أوجد معدل تغير الدالة ص = س^2، من س = 1 إلى س = 4

$$\frac{د ص}{د س} = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{\Delta س \to 0} 2 س + \Delta س$$

$= 2س$

$\therefore$ ص = $س^2$

$\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = 2 س$

عندما س = 1 $\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = 2 \times 1 = 2$

عندما س = 4 $\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = 2 \times 4 = 8$

$\therefore$ التغير = 8 – 2 = 6

للدالة ص = $س^2$

إجابة السؤال الثالث

أ–احسب القيمة الحالية لاستثمار عائده السنوي 3000 دينارٍ وسعر الفائدة السائدة هي 12%.

العائد السنوي = القيمة الحالية × سعر الفائدة السائدة

القيمة الاسمية = القيمة الحالية (1+ ع ن)

$\therefore$ القيمة الحالية = $\frac{القيمة الاسمية}{1+عن} = \frac{جـ}{1+عن} = \frac{أ}{ع}$

القيمة الحالية = $\frac{أ}{ع}$ حيث أ = 3000 ، ع = 12 %

∴ القيمة الحالية = $\frac{3000}{0.12}$ = 25000 دينار

ب- **احسب** $\int_1^3$ (س^2 – 2س+3) دس

= $\left. \frac{س^3}{3} - \frac{2س^2}{2} + 3س \right|_1^3$

= $\left. \frac{س^3}{3} - س^2 + 3س \right|_1^3$ = $(\frac{27}{3} - 9 + 3\times 3) - (\frac{1}{3} - 1 + 3)$

= $(9 - 9 + 9) - (3\frac{1}{3} - 1)$

= $9 - 2\frac{1}{3}$

= $6\frac{2}{3}$

إجابة السؤال الرابع

أ-إذا كان

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س & 2س + ص & 3 \\ 4 & ع & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

أوجد قيمة كل من س، ص، ع

∴ س = 1 ، 2س + ص = 2 ،

∵ س = 1 ∴ ص = 0

ع = 5

ب- أوجد الفائدة البسيطة لمبلغ 100 دينارٍ محسوبة لمدة 5 سنوات ثم محسوبة لمدة 6 شهور إذا كان سعر الفائدة 3%.

الفائدة (ف) = أ × ع × ن

$= 100 \times \frac{3}{100} \times 5 = 15$ دينار محسوبة لمدة 5 سنوات

$= 100 \times \frac{3}{100} \times \frac{6}{12} = 1.5$ دينار محسوبة لمدة 6 أشهر

إجابة السؤال الخامس :

أ- اتفق شخص مع مصرف على أن يقترض مبلغ 2000 دينار مع دفع أصل الدين في نهاية السنة وتقسيط الفوائد على 6 دفعات بمعدل دفعة كل شهرين من بداية المدة فإن كان سعر الفائدة 6% أوجد مقدار الدفعة الدورية.

الفائدة = المبلغ × المدة × سعر الفائدة

$= 2000 \times 1 \times \frac{6}{100} = 120$ دينار

قيمة الفائدة الدورية = $\frac{120}{6} = 20$ ديناراً شهرياً.

ب- أوجد $\underset{س \to 2}{\text{نهـا}} \frac{س^3-8}{س-2}$

$= \underset{س \to 2}{\text{نهـا}} \frac{(س-2)(س^2+2س+4)}{(س-2)}$

$= \underset{س \to 2}{\text{نهـا}} س^2 + 2س + 4$

$= (2)^2 + (2 \times 2) + 4 = 4 + 4 + 4$

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى

الجامعـــة المفتـــوحة

أسئلة في مـادة رياضيات مالية وعامة

<u>أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يأتي:</u>

س1:أ- أذكر شروط وخطوات ايجاد المعكوس الضربي للمصفوفة.

ب- أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة:

$$أ = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

س2:أ- اقترض أحد الأشخاص مبلغ 5000 دينار لمدة سنة بفائدة 3% على أن تخصم هذه الفائدة من القرض مقدماً. احسب الفائدة الحقيقية.

ب- حل المعادلتين الآتيتين بطريقة كرامر 2س + 5ص = 9، 6 س + 7ص = 2

س3:أ- إذا كانت العلاقة بين الاستهلاك ص والدخل س هي ص = أس + ب أوجد الثابتين أ، ب بالنسبة إلى فئة ثم رصد بياناتها كما يلي:

س = {50، 100، 150، ....}

ص = {10، 20، 30، ....}

ب- أوجد $\lim_{س \leftarrow 2} \frac{س^2 - 4}{س - 2}$

س4:أ- إذا أودع شخص مبلغ 6000 دينار لمدة 45 يوماً في مصرف فأصبحت جملته 6036 ديناراً. احسب معدل الفائدة.

ب- احسب $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = $\frac{س^3 + 2}{س^2 + 1}$

س5:أ- أوجد ثمن بيع وحدة منتجة إذا كان الربح الإجمالي من بيع 500 وحدة منها بقيمة 250 ديناراً وتكلفة إنتاج هذه الوحدات 900 دينار.

ب- مثل بيانياً ص = $س^2$ – 5س + 6، –2 ≤ س ≤ 3 ومن الشكل احسب جذري المعادلة $س^2$ – 5 س + 6 = 0.

مع تمنياتي بالتوفيق

إجابة السؤال الأول :

أ – شروط وخطوات إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة :

الشروط : 1− أن تكون المصفوفة مربعة .

2− محددها لا يساوي صفراً .

أما الخطوات فهي : 1− إيجاد قيمة محدد المصفوفة .

2− إيجاد مصفوفة المرافقات.

3− إيجاد المصفوفة المدورة لمصفوفة المرافقات.

4− إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات .

- ملاحظة : راجع هذا الموضوع في الجزء النظري بالكتاب.

ب− المعكوس الضربي للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} 1- & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4- & 1 & 3 \end{pmatrix}$

قيمة المحدد = $\begin{array}{cc|ccc|} 6 & 3 & 1- & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4- & 1 & 3 \end{array}$

$= [\,3 \times 5 \times -4 + 6 \times 2 \times 3 + (-1 \times 4 \times 1)] - [(1- \times 5 \times 3) + (3 \times 2 \times 1) + (6 \times 4 \times -4)]$

$= (\,-60 + 36 - 4\,) - (\,-15 + 6 - 96\,) = -28 - (-105)$

77 =

$$\begin{pmatrix} 11- & 22 & 22- \\ 15 & 9- & 23+ \\ 9- & 10- & 17 \end{pmatrix}$$ = مصفوفة المرافقات

$$\begin{pmatrix} 17 & 23+ & 22- \\ 10- & 9- & 22+ \\ 9- & 15 & 11- \end{pmatrix}$$: المصفوفة المدورة لمصفوفة المرافقات هي

$$\begin{pmatrix} 17 & 23+ & 22- \\ 10- & 9- & 22+ \\ 9- & 15 & 11- \end{pmatrix} \frac{1}{77}$$ = معكوس مصفوفة المعاملات

$$\begin{pmatrix} \frac{17}{77} & \frac{23+}{77} & \frac{22-}{77} \\ \frac{10-}{77} & \frac{9-}{77} & \frac{22+}{77} \\ \frac{9-}{77} & \frac{15}{77} & \frac{11-}{77} \end{pmatrix}$$ = $^{1-}$أ ∴

حل آخر :-

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4- & 3 \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4- & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 1- & 3 \\ 4- & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1- & 6 \\ 4- & 1 \end{vmatrix} - \\ \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1- & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 1- & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$ = مصفوفة المرافقات

$$\begin{pmatrix} (15-4) & (6-16-)- & (2-20-) \\ & & \end{pmatrix}$$

$$(18-3)- \qquad (3+12-) \qquad (1+24-)- \qquad =$$

$$(24-15) \qquad (4+6)- \qquad (5+12)$$

$$\begin{bmatrix} 11- & 22 & 22- \\ 15 & 9- & 23 \\ 9- & 10- & 17 \end{bmatrix} =$$

∴ المصفوفة المدورة لمصفوفة المرافقات هي :

$$\begin{bmatrix} 17 & 23 & 22- \\ 10- & 9- & 22 \\ 9- & 15 & 11- \end{bmatrix}$$

∴ معكوس مصفوفة المعاملات = $\frac{1}{77}$ $\begin{bmatrix} 17 & 23 & 22- \\ 10- & 9- & 22 \\ 9- & 15 & 11- \end{bmatrix}$

أ$^{1-}$ = $\begin{bmatrix} \frac{17}{77} & \frac{23}{77} & \frac{22-}{77} \\ \frac{10-}{77} & \frac{9-}{77} & \frac{22}{77} \\ \frac{9-}{77} & \frac{15}{77} & \frac{11-}{77} \end{bmatrix}$

إجابة السؤال الثاني :

ف = أ × ن × ع

الفائدة التجارية لمدة سنة = 5000 × 1 × $\frac{3}{100}$ = 150 دينار

القيمة الحقيقية للقرض = 5000 − 150 = 4850 ديناراً

معدل الفائدة الحقيقية = $\frac{150}{4850} \times 100 = 3.09$ %

ب- حل المعادلتين الآتيتين بطريقة كرامر:

2 س + 5 ص = 9 ⇐ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

6 س + 7 ص = 2

س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ ، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$

حيث $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = (2 \times 7) - (5 \times 6) = 14 - 30 = -16$

Δ س = $\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = (63 - 10) = 53$

∴ س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{53}{-16} = -3.3125$

Δ ص = $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 54 = -50$

∴ ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-50}{-16} = 3.125$

إجابة السؤال الثالث

أ- فئة الدخل س = { 50 ، 100، 150، .... }

فئة الاستهلاك ص = { 10، 20، 30، .... }

الحل : ص = أ س + ب لأي عنصر س ∋ س ، ص ∋ ص

عندما س = 50 فإن ص = 10

أي أن 10 = 50 أ + ب ———— (1)

وعندما س = 100 فإن ص = 20

أي أن 20 = 100 أ + ب ————(2)

بطرح المعادلة رقم (1) من المعادلة رقم (2) نجد أن

10 = 50 أ

أي أن أ = $\frac{10}{50}$ = 0.2

بالتعويض في المعادلة رقم (1) عن أ نجد أن

10 = 50 (0.2) + ب

10 = 10 + ب ∴ ب = صفر

∴ أ = 0.2 ، ب = 0

ب- نهــــــا (س ← 2) $\frac{س^2-4}{س-2} = \frac{(2)^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ غير محدد

نلتجئ إلى تحليل المقدار

نهــــــا (س ← 2) $\frac{س^2-4}{س-2}$ = نهــــــا (س ← 2) $\frac{(س-2)(س+2)}{(س-2)}$

عندما س ← 2

∴ المقدار = (س + 2) = 2 + 2 = 4

إجابة السؤال الرابع

أ- الفائدة (ف) = أ × ن × ع

والفائدة = جملة المبلغ – أصل المبلغ

$= 6036 - 6000 = 36$ دينارًا

$\therefore 36 = 6000 \times \frac{45}{360} \times \text{ع}$

$\therefore \text{ع} = \frac{360 \times 36}{45 \times 6000} = \frac{36}{750}$

$= 0.0480 \times 100 = 4.8\ \%$

ب- إذا كان $\text{ص} = \frac{\text{س}^3 + 2}{\text{س}^2 + 1}$

فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{(\text{س}^2 + 1) \times 3\text{س}^2 - (\text{س}^3 + 2)(2\text{س})}{(\text{س}^2 + 1)^2}$

$= \frac{\text{س}^4 + 3\text{س}^3 - 4\text{س}}{\text{س}^4 + 2\text{س}^3 + 1}$

إجابة السؤال الخامس :

الإيراد الكلي = الربح الكلي + التكاليف الكلية

$= 250 + 900 = 1150$ دينارًا

$\therefore$ سعر البيع للوحدة المنتجة $= \frac{1150}{500} = 2.3$ دينار

ب- $\text{ص} = \text{س}^2 - 5\text{س} + 6$ ، $-2 \leq \text{س} \leq 3$

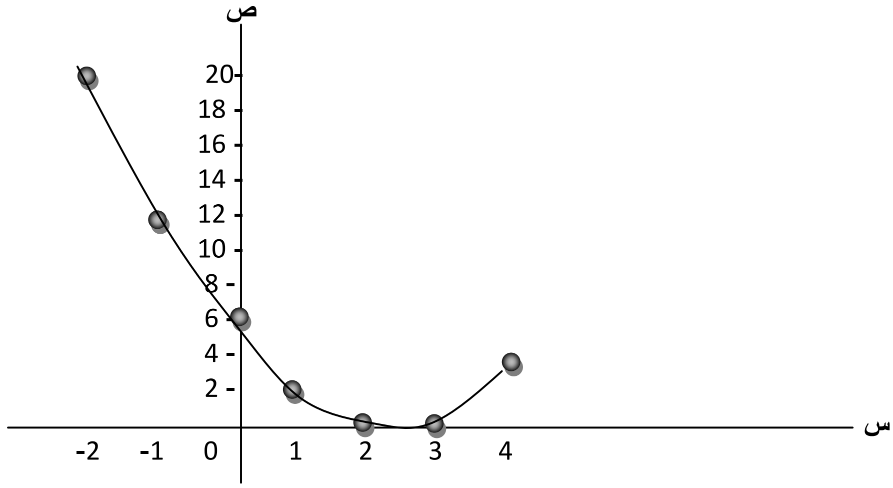
ومن الشكل احسب جذري المعادلة $\text{س}^2 - 5\text{س} + 6 = 0$

الحل : نكون الجدول التالي :

س	2−	1−	0	1	2	3
ص	20	12	6	2	0	0

∴ جذري المعادلة هما س=2 ، س=3

التمثيل البياني للمعادلة على النحو التالي:



الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى

الجامعـــة المفتـــوحة

أسئلة في مـادة رياضيات مالية وعامة

<u>أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يأتي:</u>

س1:أ− أوجد القيمة الاسمية لقرض إذا كانت الحطيطة الخارجية 8 دنانير ومدة الخصم 90 يوماً وسعر الخصم 1%.

ب− إذا كان س = {1، 2، 3، ......} ، ص = {2، 4، 6، ....}

د: س←ص، بحيث د(1) = 2، د(2) = 4، د(3) = 6 أوجد د(ن) حيث ن عدد صحيح موجب.

س2:أ- اقترض أحد الأشخاص مبلغ 5000 دينارا لمدة 120 يوماً من مصرف يحصل $\frac{1}{8}$ % عملات، $\frac{1}{16}$ % مصاريف إدارية وكان مجموع ما دفعه تكلفة (فوائد) للقرض هو 109.375 ديناراً. احسب سعر الفائدة التجارية.

ب- باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ س+1 & ص+2 & ع+3 & م+4 \\ س & ص & ع & م \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

س3:أ- أوجد عدد الوحدات المباعة من إنتاج مصنع في يوم كان إجمالي الإيراد فيه 8320 دينار وسعر بيع الوحدة 5 دنانير.

ب-إذا كان:

أ= $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

اثبت أن (أ ب)$^{-1}$ = ب$^{-1}$ أ$^{-1}$

س4:أ- من دون رسم الشكل البياني للدالة ص = 5س + 7 أوجد ميل المستقيم الممثل لهذه الدالة وطول الجزء المقطوع من محور الصادات.

ب- احسب معدل التغير في سكان دولة كان عدد سكانها عام 1980م سبعة وأربعين مليوناً وعدد سكانها عام 2000م ثمانون مليوناً.

س5:أ- احسب الفائدة المستحقة لمبلغ 3000 دينارٍ بسعر 4% من 21 شهر الربيع (مارس) إلى 27 من شهر ناصر (يوليو) عام 1998 وذلك في الحالتين (الفائدة الصحيحة والفائدة التجارية).

ب- أوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{س+5}{3س+7}$

مع تمنياتي بالتوفيق

إجابة السؤال الأول :

الحطيطة الخارجية = القيمة الاسمية × زمن الخصم ×سعر الخصم

8 =القيمة الاسمية × $\frac{90}{360}$ × $\frac{1}{100}$

∴ القيمة الاسمية = 8 × 400 = 3200 ديناراً

ب– س = { 1 , 2 , 3 , ... } ، ص = { 2 ، 4 ، 6 ، ... }

د: س ← ص ، بحيث د (1) = 2 ، د (2) = 4 ، د (3) = 6 أوجد د (ن) حيث ن عدد صحيح موجب.

س = { 1 ، 2 ، 3 ، ... }

∴ أ = 1 ، د = 1

∴ ح $_{ن}$ = أ + (ن – 1) د

= 1 + (ن – 1) × 1

= ن

ص = { 2 ، 4 ، 6 ، ... }

∴ أ = 2 ، د = 2

∴ ح $_{ن}$ = أ + (ن – 1) د

= 2 + (ن – 1) 2 = 2 ن

∴ د (ن) = 2 ن

إجابة السؤال الثاني

أ–مقدار العمولات = $\frac{1}{8}$ × $\frac{1}{100}$ × 5000 = $\frac{50}{8}$ دينارات

مقدار المصاريف الإدارية = $\frac{1}{16}$ × $\frac{1}{100}$ × 5000 = $\frac{50}{16}$ دينارات

الفوائد الكلية = فوائد المعاملات + فوائد المصاريف الإدارية + فوائد تجارية

109.37 = $\frac{50}{8}$ + $\frac{50}{100}$ + فوائد تجارية

∴ الفوائد التجارية = 100 دينار

مقدار الفائدة التجارية = 109.375 – $\frac{50}{8}$ – $\frac{50}{16}$

= 109.375 – 6.25 – 3.127 = 100 دينارٍ

الفائدة = المبلغ × المدة × السعر

100 = 5000 × $\frac{120}{360}$ × سعر الفائدة التجارية

∴ سعر الفائدة التجارية ع~ن~ = $\frac{360 \times 100}{120 \times 5000}$ = 0.06

= 6 %

ب-

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ \text{م}+4 & \text{ع}+3 & \text{ص}+2 & \text{س}+1 \\ \text{م} & \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ \text{م} & \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{م} & \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ \text{م} & \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{م} & \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

الخاصية : إذا تساوت العناصر في صفين أو عمودين لمصفوفة مربعة فإن محددها يساوي صفرًا.

حيث عناصر الصف الثاني يساوي العناصر المناظرة في الصف الثالث في المصفوفة الأولى وأن العناصر بالصف الأول تساوي العناصر المناظرة في الصف الثاني في المصفوفة الثانية.

قيمة المحدد = 0 + 0 = 0

- أو يطرح الصف الثاني من الصف الثالث فينتج أن الصف الأول = الصف الثاني

إجابة السؤال الثالث

أ-الإيراد = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

8320 = عدد الوحدات المباعة × 5 دنانير

∴ عدد الوحدات المباعة = $\frac{8320}{5}$ = 1664 وحدة

ب–

أ = $\begin{bmatrix}5 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix}8 & 6\\9 & 7\end{bmatrix}$ أثبت أن (أ ب)$^{-1}$ = ب$^{-1}$. أ$^{-1}$

أ . ب = $\begin{bmatrix}5 & 3\\2 & 1\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}8 & 6\\9 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}69 & 53\\26 & 20\end{bmatrix}$

مصفوفة المرافقات لمصفوفة أ ب = $\begin{pmatrix}-20 & 26\\53 & -69\end{pmatrix}$

مدور مصفوف المرافقات للمصفوفة أ ب = $\begin{pmatrix}-69 & 26\\53 & -20\end{pmatrix}$

محدد المصفوفة أ ب = $(53 \times 26) - (+69 \times +20) = -2$

معكوس المصفوفة أ ب = $\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-69 & 26\\53 & -20\end{pmatrix}$ = (أ ب)$^{-1}$

مصفوفة المرافقات ب = $\begin{pmatrix}-7 & 9\\6 & -8\end{pmatrix}$

مدورة مصفوفة مرافقات للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix}-8 & 9\\6 & -7\end{pmatrix}$

محدد المصفوفة ب = $(9 \times 6) - (+8 \times +7) = 54 - 56 = -2$

$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

معكوس المصفوفة ب = $\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ = ب$^{-1}$

مصفوفة مرافقات المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

مدور مصفوفة مرافقات للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

محدد المصفوفة أ = $(3 \times 2) - (+5 \times +1) = 6 - 5 = 1$

معكوس المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ = أ$^{-1}$

∴ ب$^{-1}$. أ$^{-1}$ = $\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -96 & 26 \\ 53 & -20 \end{pmatrix}$

ب$^{-1}$. أ$^{-1}$ = (أ ب)$^{-1}$

إذا حسبنا أ$^{-1}$. ب$^{-1}$ سنجد أن ذلك يساوي

أ$^{-1}$. ب$^{-1}$ = $\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -96 & 53 \\ 26 & -30 \end{pmatrix}$

وبالتالي فإن ب$^{-1}$. أ$^{-1}$ $\neq$ أ$^{-1}$. ب$^{-1}$

وأن أ$^{-1}$. ب$^{-1}$ $\neq$ (أ.ب)$^{-1}$

إجابة السؤال الرابع

أ) ص = أ س + ب ——الدالـــة——◄ ص = 5 س + 7

نجد أن الميل أ = 5

وطول الجزء المقطوع من محور الصادات = 7

حل آخر:

ص = م س + جـــ

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = م = \frac{د(ص)}{د(س)}$

∴ ص = 5 س + 7

∴ الميل = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(5س)}{د(س)} = 5 \times 1$

الجزء المقطوع : عندما س = 0 ، ∴ ص = 5 × 0 + 7 = 7

∴ النقطة (0 ، 7)

ب) معدل التغير = $\frac{ع_2 - ع_1}{ن_2 - ن_1} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ مليوناً سنوياً

$= \frac{80-47}{2000-1980} = \frac{33}{20}$

= 1.65 مليوناً سنوياً

حيث Δ ص = 80 – 47 = 33

Δ س = 2000 – 1980 = 20 عاماً

إجابة السؤال الخامس :

المبلغ 3000 دينارٍ بسعر 4% من 21 شهر الربيع إلى 27 شهر ناصر لعام 1998

∴ المادة الربيع 10، الطير= 30 ، الماء= 31، الصيف= 30 ، ناصر 27 = 128 يوماً

الفائدة الصحيحة = أ × ع × ن

$= 3000 \times \frac{4}{100} \times \frac{128}{365} = 42.08$ ديناراً

الفائدة التجارية = $3000 \times \frac{4}{100} \times \frac{126}{360} = 42$ دينارًا

حيث المدة 3/21 ⟵ 7/21 = 4 أشهر

$= 4 \times 30 + 6 = 126$ يوماً

والسنة 360 يوماً

وعام 1998 يكون شهر النوار (فبراير) = 28 يوماً

حل آخر:

$\frac{\text{الفائدة الصحيحة}}{\text{الفائدة التجارية}} = \frac{72}{73} = 0.9863$

$\frac{360}{365} = 0.9863$

∴ الفائدة التجارية = $\frac{73}{72}$ × الفائدة الصحيحة

$= \frac{73}{72} \times 42.08 = 42.66 \neq 42$

ب) أوجد $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}+5}{3\text{س}+7}$

بالقسمة على س بسطاً مقاماً (كل حد من الحدود) نحصل على :

$$\lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}+5}{3\text{س}+7} \longrightarrow = \lim\limits_{\text{س}\to \infty} \frac{1+\frac{5}{\text{س}}}{3+\frac{7}{\text{س}}}$$

وعندما س ← ∞ فإن $\frac{5}{\text{س}} \leftarrow 0$ ، $\frac{7}{\text{س}} \leftarrow 0$

ونحصل على $\lim\limits_{\text{س}\to \infty} \frac{\text{س}+5}{3\text{س}+7} = \frac{1}{3}$

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى

الجامعـــة المفتـــوحة

أسئلة في مـادة رياضيات مالية وعامة

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يأتي:

س1:أ- اقترض سالم مبلغ 2000 دينار من صديقه ليستثمره في مشروع ، واتفق الطرفان على أن يدفع سالم مبالغ شهرية لصديقه مقابل استخدام المبلغ المقترض تبدأ بعشرين دينارا وتزداد بمقدار خمسة دنانير في الشهر على أن يتوقف الدفع ويردّ المبلغ المقترض قبل أن تصل جملة الدفعات الشهرية إلى المبلغ الأصلي [2000 دينار] . أوجد أقصى مدة يمكنه أن يترك الصديق المبلغ الأصلي مستثمرًا مع سالم .

ب- أوجد معدل التغير للدالة ص = $س^2$ من س = 3 إلى س = 8

س2:أ- حل المعادلة $\frac{ص-4}{3} = \frac{ص+5}{2}$

ب- أوجد الفائدة البسيطة لمبلغ 200 دينار محسوبة لمدة 6 سنوات ثم محسوبة لمدة 9 شهور إذا كان سعر الفائدة 3%.

س3:أ- أوجد عدد الوحدات المباعة من إنتاج مصنع في يوم كان إجمالي إيراده فيه 8320 دينار وسعر بيع الوحدة 5 دنانير .

ب- باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة المحدد الآتي :

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ م+4 & ع+3 & ص+2 & س+1 \\ م & ع & ص & س \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \Delta$$

س4:أ- احسب $\int_0^2$ (س^3 – 2 س^2+3س+ 5) دس

ب- أوجد الفائدة التجارية إذا كانت الفائدة الصحيحة تساوي 1.849 .

س5:أ- أوجد ميل المستقيم 5 ص – 3 س + 9 = 0 ، ثم اوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

ب- احسب معدل التغير في سكان دولة كان عدد سكانها عام 1980 ثلاثين مليوناً وعدد سكانها عام 2000 خمسة وأربعون مليوناً.

مع تمنياتي بالتوفيق

إجابة السؤال الأول :

متوالية عددية حدها الأول = 20 وأساسها = 5 ، ن = عدد الشهور

جـ = $\frac{ن}{2}$ [2 أ + (ن-1) د]

2000 = $\frac{ن}{2}$ [(2 × 20) + (ن – 1) 5]

4000 = ن (40+ 5ن – 5) = ن (35 + 5 ن)

= 5 ن^2 + 35 ن

∴ 5 ن^2 + 35 ن – 4000 = صفر

∴ ن = $\frac{-35\pm\sqrt{4000\times5\times4+(35)^2}}{5\times2}$ = $\frac{-35\pm\sqrt{80000+1225}}{10}$

= $\frac{-35+285}{10}$ = 25

أي أن أقصى مدة هي 25 شهرًا.

ب- عند س$_1$ = 3 ⟵ ص$_1$ = 9

عند س$_2$ = 8 ⟵ ص$_2$ = 64

حيث ص = س2

معادلة تغير الدالة = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ = $\frac{64-9}{8-3}$

$\frac{55}{5}$ = 11

إجابة السؤال الثاني :

أ) حل المعادلة $\frac{ص-4}{3}$ = $\frac{ص+5}{2}$

∴ 2 (ص- 4) = 3 (ص + 5)

∴ 2 ص – 8 = 3 ص + 15

∴ ص = -23

أي 3 ص – 2 ص = -8 -15 = -23

ب) الفائدة = أ × ع × ن

الفائدة لمدة 6 سنوات = 200 × $\frac{3}{100}$ × 6 = 36 دينارًا

الفائدة ولمدة 9 شهور = 200 × $\frac{3}{100}$ × $\frac{9}{12}$ = 4.50 دنانير

إجابة السؤال الثالث :

أ) الإيراد = عدد الوحدات المباعة × سعر وحدة البيع

8320 = عدد الوحدات المباعة × 5

∴ عدد الوحدات المباعة = $\frac{8320}{5}$

= 1664 وحدة

ب)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ م+4 & ع+3 & ص+2 & س+1 \\ م & ع & ص & س \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ م & ع & ص & س \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ م & ع & ص & س \\ م & ع & ص & س \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

= + = صفر+صفر

الخاصية : إذا تساوت العناصر في صفين أو عمودين لمصفوفة مربعة فإن محددها يساوي صفرًا.

∴ Δ = صفر

إجابة السؤال الرابع :

أ) **احسب** $\int_0^2 (\text{س}^3 - 2\,\text{س}^2 + 3\text{س} + 5)\, \text{دس}$

$$= \left[\frac{\text{س}^4}{4} - \frac{2\,\text{س}^3}{3} + \frac{3\text{س}^2}{2} + \frac{5\,\text{س}}{1} \right]_0^2$$

$$= \left[\frac{(2)^4}{4} - \frac{2\,(2)^3}{3} + \frac{3(2)^2}{2} + \frac{5\,(2)^1}{1} \right] - \text{صفر}$$

$$= \left(4 - \frac{16}{3} + 6 + 10 \right) - \text{صفر}$$

$$= 20 - 5\tfrac{1}{3}$$

$$= 14.67$$

ب) $\frac{\text{الفائدة الصحيحة}}{\text{الفائدة التجارية}} = \frac{72}{73}$

∴ $\frac{\text{الفائدة التجارية}}{\text{الفائدة الصحيحة}} = \frac{73}{72}$

∴ الفائدة التجارية = $\frac{73}{72} \times 1.849 = 1.875$ دينار

إجابة السؤال الخامس :

أ) 5 ص − 3 س + 9 = 0

على صورة الدالة الصريحة ص = $\frac{3}{5}$ س −

∴ ميل المستقيم = $\frac{3}{5}$ وطول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{7}{5}$

ب) معدل التغير = $\frac{ع_2 - ع_1}{ن_2 - ن_1}$ = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ مليوناً سنوياً

∴ $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{45-30}{2000-1980}$

= $\frac{15}{20}$ = 0.75 مليوناً سنوياً